**Les I. Regel van Bayes**

Open het document ['Theorie Bayes'](http://arrangeren.wikiwijs.nl/44470/Theorie_Bayes) (ctrl-klik). Bestudeer de theorie en maak de opdrachten 1 t/m 10. Noteer je antwoorden hieronder.

**Opdrachten:**

1. Wat denk jij? Is die kans heel klein? Of misschien gewoon 1/6?

Bedenk wel dat dobbelstenen geen ‘geheugen’ hebben.

|  |
| --- |
| Antwoord: |

2. Wat doe je: verander je van keus of blijf je staan? Leg je keuze uit.

|  |
| --- |
| Antwoord: |

In de formulering van het drie-deuren-probleem wordt nadrukkelijk vermeld dat de quizmaster weet achter welke deur de auto staat. De quizmaster handelt dus met voorkennis: van de twee overgebleven deuren opent hij bewust een deur waarachter niets staat. Voor de strategie die de kandidaat volgt, is dit een belangrijk gegeven.

3. Als de quizmaster een deur opent waarachter niets staat, geeft deze informatie dan een verdubbeling van de winstkans als de kandidaat wisselt van deur? Leg je antwoord uit.

|  |
| --- |
| Antwoord: |

4. Probeer een aantal keren om een prijs te winnen. Bedenk wel eerst hoeveel pogingen jij overtuigend vindt om vast te stellen of je beter kunt blijven staan of van deur te veranderen. Hoeveel pogingen heb je gedaan? Hoe vaak heb je gewonnen?

|  |
| --- |
| Antwoord: |

5. Hoe groot is de kans om geen zes te gooien, in formule P(geen zes)? Hoe groot is de kans om 2 x achter elkaar geen zes te gooien? En de kans dat dit mij 20 x achter elkaar overkomt?

|  |
| --- |
| Antwoord: |

6. Zijn de worpen in dit voorbeeld afhankelijke of onafhankelijke gebeurtenissen?

|  |
| --- |
| Antwoord: |

7. a Hoe zeg je dat in woorden: P(A|B)?
 b Als je nu weet dat P(A) = 0,2 en dat P(B|A) = 0,01, kun je dan iets zinnigs zeggen over P(A|B)?

Gebruik de onderstaande kanstabel met 1000 jongeren.



|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| Antwoord: |

8. Wat is jouw conclusie? Is de informatie van de getuige waardevol genoeg voor een verder onderzoek of zelfs een veroordeling? Leg uit.

|  |
| --- |
| Antwoord: |

9. Natuurlijk mag je niet door 0 delen, dus P(A) moet ongelijk aan 0 zijn. Wat betekent dat in woorden?

|  |
| --- |
| Antwoord: |

10. Gevalstudie

Werk het rekenprobleem dat Ionica in het artikel oplost, uit met de regel van Bayes. Volg daarvoor de stappen die we hebben gemaakt in het voorbeeld van Ongelukje. Kom je op hetzelfde uit als Ionica?

 

|  |
| --- |
| Antwoord: |

**Een zaak**

Nog even het probleem. Je wordt beschuldigd van een moord die je niet hebt gepleegd. Maar bewijs je onschuld maar eens! Uit forensisch onderzoek blijkt dat van het gevonden bloedspoor, de toevallige matchkans gelijk is aan 1:1000 (het DNA-profiel is onvolledig). De kans dat jij de moord gepleegd hebt zou dus, simpel geredeneerd, gelijk moeten zijn aan 99,9%. Zoals het er nu uitziet, zit je in een hopeloze situatie.

Maar gelukkig is er forensische statistiek. We gaan het Bayesiaanse model gebruiken om jou mogelijk vrij te pleiten.

De *a priori* kansverhouding

De rechter, en niemand anders dan de rechter, oordeelt over de vraag of je schuldig bent. De rechter heeft in eerste instantie (dus zonder rekening te houden met het sporenbewijsmateriaal) te maken met twee hypotheses. De hypothese *Hp* van de aanklager (jij bent schuldig) en de hypothese *Hd* van de verdediging (jij bent onschuldig). De rechter zal jou veroordelen als de hypothese van de aanklager veel waarschijnlijker is dan die van de verdediging.

Als het proces begint heeft de rechter *a priori* een bepaalde inschatting van de kansverhouding. In jouw geval zou de rechter als volgt kunnen redeneren: Bekend is welke personen er ten tijde van de moord op de boot waren. In totaal kunnen 1001 personen de dader zijn.

In jouw geval is de a priori kansverhoudingtussen de kans dat je schuldig bent en de kans dat je onschuldig bent dan:

.

*  = P(A) = de kans dat je schuldig bent
*  = P(nietA) = de kans dat je onschuldig bent.

De *a priori* kansverhouding is gelijk aan 1/1000. Dat is een mooi begin. Maar de rechter weegt ook het sporenmateriaal mee in het eindoordeel.

De likelihood ratio

Om de kracht van bewijsmateriaal (in dit geval het bloedspoor) uit te drukken, gaat men volgens de regel van Bayes te werk. Er is niet alleen de gebeurtenis van de moord met een bepaalde kans P(A) = P(Hp), dat jij het hebt gedaan, er is ook de gebeurtenis B van een match, met een bepaalde kans P(B) dat die jou terecht als de schuldige persoon aanwijst. Het sporenmateriaal heeft immers ook een bepaalde toevallige matchkans P(niet B). Dit is de kans dat een willekeurig gekozen persoon hetzelfde DNA-profiel heeft als dat van het spoor. In jouw geval bedraagt die toevallige matchkans P(niet B) 1/1000. De matchkans wordt nu verwerkt in een zgn. likelihood ratio. Hierbij worden twee kansen tegen elkaar afgewogen.

* de voorwaardelijke kans 1 =P(B|Hp), dat is de kans dat men de match tussen jou en het gevonden spoor vindt, en de hypothese van de aanklager juist is, namelijk dat jij het gedaan hebt.

Deze kans is vrijwel gelijk aan 1. Want als de moordenaar een bloedspoor achterlaat, zal het DNA-profiel van het spoor logischerwijs matchen met de moordenaar.

* de voorwaardelijke kans 2= P(B|Hd), dat is de kansdat men de match tussen jou en het gevonden spoor vindt, terwijl de hypothese van de verdediger juist is, namelijk dat jij het niet gedaan hebt.

Deze is in dit geval gelijk aan de matchkans: 1/1000.

De likelihood ratio is nu de voorwaardelijke kans 1 / de voorwaardelijke kans 2.

In jouw geval is de *likelihood ratio:*

 *1*

 *1 = 1000*

*1000*

De *a posteriori* kansverhouding

En nu moet de rechter tot een oordeel komen. Volgens de regel van Bayes wordt

de *a priori* kansverhouding vermenigvuldigd met de *likelihood ratio*. Wat dan

ontstaat wordt de *a posteriori* kansverhouding genoemd.

Dat wordt dus in dit geval: P(Hp|B)/P(Hd|B) = P(Hp)/P(Hd) x P(B|Hp)/P(B|Hd) = 1/1000 x 10000 = 1

Omgerekend wordt dus volgens Bayes, zoals je in Theorie Bayes gelezen hebt, de kans dat je schuldig bent als er een match gevonden, dat is P(Hp|B), gelijk aan:

 P(B|Hp) x P(Hp )

P(B|Hp) x P(Hp) + P(B|Hd) x P(Hd)

Bereken voor deze situatie de kans dat je schuldig bent als er een match geconden is.

|  |
| --- |
| Antwoord: |

Voor uitgebreider informatie kun je een artikel over statistiek in de rechtszaal lezen: <http://www.kennislink.nl/publicaties/forensische-statistiek>

11. Is het aannemelijk dat een rechter je op basis van deze kansverhouding zal

veroordelen?

|  |
| --- |
| Antwoord: |

12. In dit voorbeeld is uitgegaan van een onvolledig DNA-profiel met een matchkans van 1/1000. Wat zouden je kansen geweest zijn als er een volledig DNA-profiel gevonden was met een matchkans van 1,45 x 10-16?

|  |
| --- |
| Antwoord: |